

Laplace Transformer

تحويل لابلاس

Time D. $\rightarrow$ Frequency D.



$f(t)$



$F(s)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

قانون الحام

Laplace Transform قوانین

$$1 - \mathcal{L} e^{at} = \frac{1}{s-a}$$

$$2 - \mathcal{L} t^n = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

27 / 6

$$3 - \mathcal{L} \sin at = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$4 - \mathcal{L} \cos at = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$5 - \mathcal{L} \sinh at = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$6 - \mathcal{L} \cosh at = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$7 - \mathcal{L} u(t-a) = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$8 - \mathcal{L} \delta(t-a) = e^{-as}$$

$$9 - \mathcal{L} e^{bt} \sin at = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$10 - \mathcal{L} e^{bt} \cos at = \frac{(s-b)}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$11 - \mathcal{L} \left\{ \frac{t}{2a} \sin at \right\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$12 - \mathcal{L} \left\{ t \cos at \right\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$13 - \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at) \right\} \\ = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$14 - \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2a} (\sin at + at \cos at) \right\} \\ = \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$\vec{0} \rightarrow S L^*$



$$\sin^2(\vec{u} \cdot \vec{v}) t = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \right) t \right)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$1 - \sin \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$$

$$2 - \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$3 - \tan \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$$

hyperbolic function

$$1 - \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2 - \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$3) \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Laplace inverse

تحويل لابلاس العكسي

time $\leftrightarrow$ frequency

$$1 - \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s}$$

$$f(t) = 1$$

$$2 - \mathcal{L}^{-1} \frac{k}{s}$$

$$k$$

29 / 67

$$3 - \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s-a}$$

$$e^{at}$$

$$4 - \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s+a}$$

$$e^{-at}$$

$$5 - \mathcal{L}^{-1} \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\sin at$$

$$6 - \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\cos at$$

$$7 - \mathcal{L}^{-1} \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$t^n$$

$$8 - \mathcal{L}^{-1} \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\sinh at$$

$$9 - \mathcal{L}^{-1} \frac{S}{s^2 - a^2} \rightarrow \cosh at$$

$$10 - \mathcal{L}^{-1} \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \rightarrow e^{at} t^n$$

$$* 11 - \mathcal{L}^{-1} \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \rightarrow e^{-at} t^n$$

$$12 - \mathcal{L}^{-1} \frac{w}{(s-a)^2 + w^2} \rightarrow e^{at} \sin wt$$

$$* 13 - \mathcal{L}^{-1} \frac{w}{(s+a)^2 + w^2} \rightarrow e^{-at} \sin wt$$

$$14 - \mathcal{L}^{-1} \frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2} \rightarrow e^{at} \cos wt$$

30 / 67

$$* 15 - \mathcal{L}^{-1} \frac{s+a}{(s+a)^2 + w^2} \rightarrow e^{-at} \cos wt$$

$$16 - \mathcal{L}^{-1} \frac{w}{(s-a)^2 - w^2} \rightarrow e^{at} \sinh wt$$

$$* 17 - \mathcal{L}^{-1} \frac{w}{(s+a)^2 - w^2} \rightarrow e^{-at} \sinh wt$$

$$18 - \mathcal{L}^{-1} \frac{s-a}{(s-a)^2 - w^2} \rightarrow e^{at} \cosh wt$$

$$* 19 - \mathcal{L}^{-1} \frac{s+a}{(s+a)^2 - w^2} \rightarrow e^{-at} \cosh wt$$

The inverse Laplace transforms
Some important formulae

بعض الصيغ الهامة لتحويل لابلاس العكسي

ex 1 / $\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 - a^2} \rightarrow \frac{a}{a}$

$$= \frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1} \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$= \frac{1}{a} \sinh at$$

ex 2 / $\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + a^2} \rightarrow \frac{a}{a}$

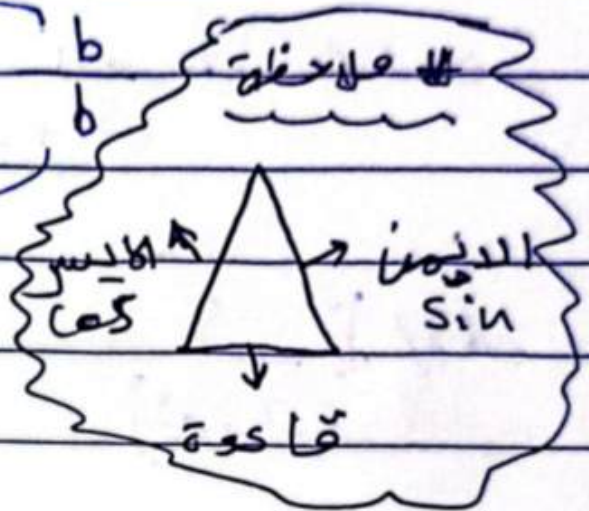
$$= \frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1} \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{a} \sin at$$

$$\text{ex 3/ } \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$= \frac{1}{b} \mathcal{L}^{-1} \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$= \frac{1}{b} e^{at} \sin bt$$



$$\text{ex 4/ } \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s-a)^2 - b^2}$$

$$= \frac{1}{b} \mathcal{L}^{-1} \frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$$

$$= \frac{1}{b} e^{at} \sinh bt$$

$$\text{ex 5/ } \mathcal{L}^{-1} \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$$

$$= e^{at} \cosh bt$$

the inverse Laplace transform by using

Partial fraction.

$$\text{ex 1 / } \mathcal{L}^{-1} \frac{4s-5}{s^2-s+2}$$

$$\text{sol / } \mathcal{L}^{-1} \frac{4s-5}{(s-2)(s+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4s-5}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+1)} \right]$$

inverse Z-Transform

$x(n)$ ← $X(z)$ finding

ex / Find $x(n)$

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}$$

So I

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{3-2^{-1}-6z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{3-7z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{5/3 z^{-1}}{1 - \frac{7}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}}$$

نحتاج ان نكتب في صورة
نفرم ونقسم في 3
نقسم البسط في 3
نقسم المقام في 3

المطلوب : Partial

$$X(z) = \frac{\frac{5}{3} z^{-1}}{1 - \frac{7}{3} z^{-1} + \frac{2}{3} z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{5/3 z}{z^2 - \frac{7}{3}z + \frac{2}{3}}$$

$$X(z) = \frac{5/3}{z^2 - \frac{7}{3}z + \frac{2}{3}}$$

نقسم في 3 في المقام

$$X(z) = \frac{5/3}{z^2 - \frac{7}{3}z + \frac{2}{3}}$$

نقسم البسط في 3

$$X(z) = \frac{5/3}{(z-2)(z-\frac{1}{3})}$$

الحل هو A و B

$$X(z) = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z-\frac{1}{3})}$$

$$A = \frac{5/3}{(2-2)(2-\frac{1}{3})} \quad z-2=0 \quad z=2$$

$$A = \frac{5/3}{2-\frac{1}{3}} = 1$$

المطلوب : Partial

$$B = \frac{5/3}{(2-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})} \quad z-\frac{1}{3}=0 \quad z=\frac{1}{3}$$

$$B = \frac{5/3}{\frac{1}{3}-2} = -1$$

$$X(z) = \frac{A}{(z-2)} + \frac{B}{(z-\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-\frac{1}{3}}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

نقسم في 3 في المقام

$$\frac{z}{z-a} = a^n u[n] \quad x(n) \leftarrow \text{نقسم في 3 في المقام}$$

$$x(n) = 2^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Probability

الاحتمالية

التجربة	Sample space فضاء العينة	$n(S)$
Passing Coin	T, H	2
Rolling Die	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
Answer	T, F	2
True Fates		

ex / Find $N(s)$ for rolling Two dice

اوجد احتمالات رمي نردتين؟

die die2	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$N(s) = N^n$$

$$N(s) = 6^2 = 36 \text{ احتمال}$$

Event in 1 ap

~~ex/~~ Find event of getting at least
one head when coin is passing twice?

العثور على حدث العملة العكس
عند مرور العملة مرتين

$$n(s) = N^n$$

$$n(s) = 2^2 = 4 \quad [HH, HT, TH, TT]$$

$$nE = 3$$

$$nE = [HH, HT, TH]$$

Find event of getting odd number
when rolling die?

العدد کی مدد سے die کی رقم فردی یا جوڑی

$$n(s) = n^n \quad n(s) = 6^1 = 6$$

$$n(s) = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

$$E_n = 3 \\ [1, 3, 5]$$

أ- مقادير التوزيع المركزية

mean - الوسط الحسابي
median - الوسط
mode - الكثر

Mean - الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

قانون
mean

ex/ find the mean for (1, 6, 5, 2, 8, 6, 9, 10, 11)

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1+6+5+2+8+6+9+10+11}{9}$$

$$\bar{x} = \frac{58}{9} = 6.44$$

B - الوسيط median

ترتيب الأرقام من الأصغر إلى الأكبر

2 - عدد القيم

A - إذا كان عدد فردي

$$n + 1$$

ترتيب الوسيط

$$2$$

B - إذا كان زوجي

تأخذ الرقمين الوسطيين و نأخذ الوسيط الحسابي لها

(نمثلة)

$$\text{median} = \frac{\sum n}{2}$$

Q1/ Find the median (1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

$$\text{median} = \frac{\sum n}{2} = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\text{median} = 6.5$$

c- المعدل

الرقم الأكثر تكراراً "أكثر القيم شيوعاً"

Find the mode

(1, 6, 5, 2, 8, 6, 10, 9, 10, 6)

mode = 6

الربيعيات

Quartile

Q_1	Q_2	
1, 2, 5	6	7, 8, 9

$$Q_1 = 2$$

$$Q_2 = 6$$

$$Q_3 = 8$$

2 - مميزات (مقاييس) التشتت

Range - المدى

الفرق بين أكبر وأصغر قيمة

Find the Range (1, 5, 4, 11, 6, 7)

$$\text{Range} = 11 - 1$$

$$\text{Range} = 10$$

B- التباين والانحراف المعياري

Variance and SD

$$S^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

$$SD = \sqrt{S^2}$$